Ορισμένες αποδείξεις ότι 0.9999…..=1 και «το γιατί» του εκπλήσσοντος αποτελέσματος.

Γιάννης Π. Πλατάρος

plataros@gmail.com

Περίληψη: Η ισότητα 0,999…=1 είναι αντικείμενο συζητήσεων στο διαδίκτυο, μεταξύ φοιτητών και όχι μόνον. Αυτή η ισότητα αμφισβητείται πεισματικά. Ακόμα και συγκεκριμένες μαθηματικές αποδείξεις, δεν πείθουν. Διαφαίνεται, ότι η δυσκολία στην διαισθητική κατανόηση του απείρου, δείχνει τα όρια της πεπερασμένης φύσης του ανθρώπου ενώ παράλληλα, αναδεικνύεται η δύναμη και η πρακτική αξία των μαθηματικών αποδείξεων.

Εισαγωγή: Το αποτέλεσμα ότι 0.9999….=1, [1],[2],[3] όσες αποδείξεις και να παραθέσουμε, δεν γίνεται κατανοητό-πλήρως αποδεκτό από την ανθρώπινη πεπερασμένη διάσταση που νομίζει ότι κατανοεί και το άπειρο, όσο κι αν κατανοεί τα μαθηματικά εργαλεία της λογικής και της απόδειξης . Προτείνω να παρακολουθήσουμε τις αποδείξεις και στο τέλος θα επιχειρήσουμε διείσδυση, ενώ υποσχόμεθα πλήρη κατανόηση, αν και στις «διαισθητικές εξηγήσεις» που είναι «κόντρα» στην «λογική» δείχνουν να δυστροπούν και πάρα πολλοί μαθηματικοί!



Απόδειξη 1: Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι $\frac{1}{9}=0.111111111...$

Οπότε $1=9\cdot\frac{1}{9}=9\cdot 0,111111....=0,99999999......$

Απόδειξη 2 : Ομοίως γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{3}=0,33333.....$ Οπότε $1=3\cdot\frac{1}{3}=3\cdot 0,33333.....=0,99999.....$

1/3 = 0.333333...   2/3 = 0.666666... Επομένως   1/3 + 2/3 = .999999... = 1.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{11} = .09090909\ldots \\ + \ \frac{10}{11} = .90909090\ldots \\ \hline \frac{11}{11} = .99999999\ldots \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{7} = .285714285714\ldots \\ + \ \frac{5}{7} = .714285714285\ldots \\ \hline \frac{7}{7} = .999999999999\ldots \end{array}$$

Απόδειξη 3: Έστω ότι χ=0,999999….. (1) τότε

10χ=9,999999999……. (2)

Αν αφαιρέσω κατά μέλη στο σχήμα (2)-(1) θα έχω:

10χ-χ =9,9999999999999…..-0,9999999999……. Δηλ.

9χ=9,0000000000……… Ήτοι 9χ=9 και τελικά χ=$\frac{9}{9}=1$.

Πιο κομψά 10χ=9,999…=9+0,999…=9+χ, όπερ χ=1.

Απόδειξη 4 : 0,99999999999999999999……….=

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1.000}+\frac{9}{10.000}+\frac{9}{100.000}+\frac{9}{1.000.000}+\ldots=$$

$$\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+\ldots=$$ (Άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου με λόγο $\frac{1}{10}$,

$$\Sigma=\frac{\alpha}{1-\lambda} \Rightarrow \Sigma=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}}=1$$

Απόδειξη 5.

$$0,999\ldots=\lim_{\nu\to\infty}0,\underbrace{99\ldots9}_{\nu\ \varepsilon\nu\nu\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha}=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{9}{10^{\kappa}}=\lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^{\nu}}\right)=1-\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{10^{\nu}}=1-0=1$$

(Ιδια με την 4, με λίγο αυστηρότερη ορολογία)

Απόδειξη 6.

$$0,\overline{9}=0,\overline{9} \Leftrightarrow 9\cdot 0,\overline{9}=9\cdot 0,\overline{9} \Leftrightarrow 9\cdot 0,\overline{9}=(10-1)\cdot 0,\overline{9} \Leftrightarrow$$
$$9\cdot 0,\overline{9}=9,\overline{9}-0,\overline{9} \Leftrightarrow 9\cdot 0,\overline{9}=9 \Leftrightarrow 0,\overline{9}=1$$

Και αυτή η ιδέα μια αναδιάταξη και διαφοροποιημένη παρουσίαση προηγούμενων αποδείξεων είναι.

Απόδειξη 7

$$\left(\frac{1}{3}\right)_{(\beta άση 10)}=0,1_{(\beta άση 3)} \Leftrightarrow$$
$$3_{(\beta άση 10)}\bullet\left(\frac{1}{3}\right)_{(\beta άση 10)}=10_{(\beta άση 3)}\bullet 0,1_{(\beta άση 3)} \Leftrightarrow$$
$$3_{(\beta άση 10)}\bullet 0,33333...._{(\beta άση 10)}=1_{(\beta άση 3)} \Leftrightarrow$$
$$0,999999......._{(\beta άση 10)}=1_{(\beta άση 3)}$$
$$0,999999......._{(\beta άση 10)}=1_{(\beta άση 10)} \quad ό.έ.δ.$$
$$(\text{Οι μονάδες είναι ίσες σε όλες τις βάσεις αρίθμησης.})$$

Απόδειξη 8: Η ακολουθία διαστημάτων $\mathrm{I}_\nu=[0.\underbrace{9....9}_{\nu\ \varepsilon\nu\nu\iota ά\rho\iota\alpha},1]\ \nu\in\mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία διαστημάτων για τα οποία ισχύει

(i) $\mathrm{I}_1\supset\mathrm{I}_2\supset\mathrm{I}_3\supset\mathrm{I}_4\supset.....$ (ii) $\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\mathrm{I}_\nu\neq\varnothing$ διότι μεταξύ δύο ρητών πάντα υπάρχει ενδιάμεσος (λ.χ. ο μέσος όρος τους $\frac{\alpha+\beta}{2}$)



(iii) $\lim_{\nu\to\infty}|0.\underbrace{9....9}_{\nu\ \varepsilon\nu\nu\iota ά\rho\iota\alpha}-1|=0$, διότι η διαφορά ισούται με $0,\underbrace{0.....0}_{\nu\ \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota κά}1<\varepsilon$, για κάθε ε>0, για κάθε $\nu>\nu_0(\varepsilon)$, αρκεί κάθε φορά να επιλέγουμε ως $\nu_0(\varepsilon)$ το πλήθος των μηδενικών ψηφίων που υπάρχουν μετά την υποδιαστολή μέχρι το πρώτο μη μηδενικό, της δεκαδικής αναπαράσταση του ε, προσαυξημένο κατά 1, οσοδήποτε μικρό και να είναι το ε.

Σύμφωνα με την αρχή του κιβωτισμού η τομή περιέχει μοναδικό αριθμό . Αυτός προφανώς είναι το 1. Αλλά και ο 0,9999…..(μη πεπερασμένα εννιάρια

) περιέχεται σε κάθε σύνολο της ακολουθίας και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Άρα 1=0,99999999999999…

Απόδειξη 9. Αν α=1 και β=0,99999… , τότε $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1,999999....}{2} = 0,99999..... = \beta$ και όταν $\frac{\alpha+\beta}{2} = \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Απόδειξη 10. *(Βασισμένη στην προηγούμενη ιδέα)*

Λήμμα: Αν *|α-β|<ε για κάθε ε>0, τότε α=β.*

Απόδειξη λήμματος: Έστω ότι $\alpha \neq \beta$. Τότε $|\alpha-\beta| = \varepsilon^* \neq 0$

Τότε λ.χ. για $\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{2}$ έχουμε $\varepsilon^* < \frac{\varepsilon^*}{2}$ *,άτοπο. Άρα α=β* .

Η απόδειξη συμπληρώνεται με την διαπίστωση ότι η διαφορά 1-0.9999… γίνεται οσοδήποτε μικρή.*(Βλέπε απόδειξη 8.)*

Απόδειξη 11: Αν αποδείξουμε ότι (0,999…)·(0,999…)=1 , τότε προφανώς 0,999…=1 Πράγματι, (0,999…) ·(0,999…)=

$$\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+...\right)\cdot\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+...\right)=$$

$$\frac{9}{10^1}\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}++...\right)+\frac{9}{10^2}\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+...\right)+\frac{9}{10^3}\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+...\right)+...=$$

$$\left(\frac{81}{10^2}+\frac{81}{10^3}+\frac{81}{10^4}+...\right)+\left(\frac{81}{10^3}+\frac{81}{10^4}+\frac{81}{10^5}+...\right)+\left(\frac{81}{10^4}+\frac{81}{10^5}+\frac{81}{10^6}+...\right)+...=$$

$$\frac{81}{10^2}\left(1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+...\right)+\frac{81}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+...\right)+\frac{81}{10^4}\left(1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+...\right)=$$

$$\frac{81}{10^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}+\frac{81}{10^3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}+\frac{81}{10^4}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}+...=$$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\right)\cdot\frac{81}{10^2}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\right)=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=\left(\frac{10}{9}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=1 \text{ ό.έ.δ.}$$

Απόδειξη 12: Έστω ότι 0,999…<1 . Τότε υπάρχει ε>0: 0,999…+ε=1. Θεωρούμε τον αριθμό $ε^* \leq$ ε, ο οποίος προκύπτει κατασκευαστικά από τον ε, όπου λαμβάνουμε το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο του ε ως 1 και τα υπόλοιπα όλα 0.

Τότε

$$0,999\ldots+\varepsilon^*=0,999\ldots+0,\underbrace{000...000}_{\nu\psi\eta\varphi\iota\alpha}1000....=1,\underbrace{000...000}_{(\nu+1)\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}999....>1 \acute{\alpha}\tau o\pi o.$$

Διότι προσθέσαμε στον 0,999… τον $ε^* \leq$ ε και βρήκαμε αποτέλεσμα μείζον του 1 ενώ θα έπρεπε να βγει μικρότερο ή ίσο του 1.

Απόδειξη 13. Έχουμε :

$$0,999....+0,999....=(0,9+0,09+0,009+...)+(0,9+0,09+0,009+...)=$$
$$(0,9+0,9)+(0,09+0,09)+(0,009+0,009)+...=$$
$$1,8+0,18+0,018+...=(1+0,8)+(0,1+0,08)+(0,01+0,008)+...=$$

$$1+(0,8+0,1)+(0,08)+0,01)+(0,008+0,001)+...=$$
$$1+0.9+0.09+0.009+...=1+0,999....$$

Άρα με διαγραφή του 0,999… και στα δύο μέλη αρχικού και τελικού μέλους ισότητας, λαμβάνουμε 1=0,999…

Απόδειξη 14: $\chi=0,999...\Leftrightarrow\chi=0,9+0,0999....\Leftrightarrow\chi=0,9+\frac{0,999...}{10}\Leftrightarrow$

$$\chi=0,9+\frac{\chi}{10}\Leftrightarrow\frac{9}{10}\chi=0,9\Leftrightarrow\chi=1$$

Απόδειξη 15 : Σύμφωνα με την μέθοδο της εξάντλησης του Αρχιμήδους που παρουσιάζεται στο βιβλίο 13 των Στοιχείων του Ευκλείδους, που είναι ένα κριτήριο σύγκλησης, εάν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε μέγεθος, όχι μικρότερο του ημίσεός του, από το εναπομένον, όχι μικρότερο του ημίσεος του και κ.ο.κ. το τελικά εναπομένον, γίνεται οσοδήποτε μικρό.

Δηλ. 1-0,9=0,1 $\rightarrow$ 0,1-0,09=0,01 $\rightarrow$ 0,01-0,009=0,001 κ.ο.κ.

Για την οσοδήποτε μικρή διαφορά έχουμε (βλέπε και απόδειξη 10) έχουμε τελικά εξίσωση των μεγεθών. Δηλ. 1=0,999…

Παρατηρήσεις και προβλήματα στην κατανόηση του αποτελέσματος: Είναι βέβαιο και απολύτως διαπιστωμένο ότι η κατανόηση της ισότητας, δεν είναι καθόλου προφανής, ούτε για φοιτητές μαθηματικών ,ούτε και για αποφοίτους Μαθηματικών τμημάτων. Προκαλεί δυσπιστία, αντιρρήσεις, αντιπαραθέσεις με έντονο θυμικό :«Δεν μοιάζει για σωστό». «Δεν μπορεί να είναι σωστό…» Δεκάδες κοινωνικά δίκτυα και φόρα παγκοσμίως ασχολούνται με αυτή την «παράδοξη ισότητα» που προκαλεί κατάπληξη. Αναζήτηση στην Google με λέξεις κλειδιά «0.999…» , «1=0.999..», «equal 1=0.999…» δίνει για μεν την πρώτη 9.390.000 αποτελέσματα για την δεύτερη 34.000 και για την τρίτη 8.540 αν βάλουμε «proof 1=0.999…» πάνω από 6.000 (αναζήτηση 9/9/2015) διαβάζοντας σχόλια, λάθη, παρατηρήσεις, πάνω στο όλον θέμα, παρατηρητέα είναι τα παρακάτω:

$$\underbrace{0,999\ldots}_{\omega} = 1 - \frac{1}{10^{\omega}}$$

Μια θεώρηση -κοίταγμα από πλευράς «τελειωμένου απείρου»

1 . Πυρήνας της όλης προβληματικής είναι η αδυναμία κατανόησης του απείρου ως προς την μία θεώρησή του. Αρχαιόθεν υπάρχουν δύο θεωρήσεις. Το «δυνάμει» άπειρο και το «εν ενεργεία» άπειρο. Κατά το πρώτο έχουμε πεπερασμένη μεταβλητή ποσότητα η οποία, όταν μεταβάλλεται, είναι δυνατό να ξεπεράσει κάθε όριο, ενώ κατά το δεύτερο θεωρούμε ότι υπάρχει αυτή τη στιγμή κάτι που έχει ήδη ξεπεράσει κάθε όριο. Στην ακολουθία των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, ..., ν, ... ο γενικός όρος ν είναι μια μεταβλητή ποσότητα πάντοτε πεπερασμένη, αλλά τέτοια ώστε να μπορεί να ξεπεράσει οποιονδήποτε δοσμένο και ορισμένο θετικό αριθμό. Το πλήθος των όρων του συνόλου των φυσικών αριθμών, το οποίο είναι ένα ενιαίο όλο, το $\mathbb{N}$ μπορεί να χρησιμεύει ως παράδειγμα του «εν ενεργεία» απείρου. Κατά τον Αριστοτέλη το άπειρο υπάρχει μόνο «δυνάμει» και όχι «ενεργεία». Το αποτέλεσμα 0,999…=1 δίνει την εντύπωση (και φορμαλιστικά,

σημειολογικά) ότι κάποια εννιάρια αυξάνονται απεριόριστα πλησιάζοντας το 1 απεριόριστα, χωρίς όμως ποτέ να γίνεται ίσο με αυτό. Το ίδιο

επιστημολογικό-διδακτικό εμπόδιο έχουμε λ.χ. με την ακολουθία $\frac{1}{\nu} \to 0$

Απόδειξη στον πίνακα

αφού το πρώτο μέλος ποτέ δεν είναι μηδέν. Η μορφή $\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}=0$, ως ισότητα, χειροτερεύει το «παράδοξο» ενώ το διδακτικό αντιπαράδειγμα άρσης της παρανόησης του τύπου $\frac{(-1)^{\nu}}{\nu} \to 0$ (φθίνουσα ταλάντωση οσοδήποτε κοντά στο 0, εφ΄ όσον εξηγηθεί διεξοδικώς) αίρει μερικώς την παρανόηση και ίσως αίρεται τελικώς με την $\{\alpha_\nu\}$: $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa+1 \\ 0 & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa \\ -\frac{1}{\nu} & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa+2 \end{cases}$ η οποία όμως είναι μια μη συνήθης μορφή ακολουθίας.

Ωστόσο, μια ισότητα αριθμών είναι πολύ πιο ευαίσθητη στην κριτική, παρ΄ότι το 0,999…=1 ,ουσιαστικά, δεν αφίσταται ποιοτικώς από το πιο

σύνηθες και οικείο αποτέλεσμα $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}=1$. Σε κάθε περίπτωση, όταν η σκέψη εγκλωβίζεται μόνο στην θεώρηση του απείρου ως δυνάμει, δεν μπορεί να δει το 0,999… ως 1, αλλά μόνο «ως απεριόριστα κοντά στο 1» και βεβαίως χωρίς να κατανοεί το νόημα των συνεπειών της φράσης εντός εισαγωγικών.

Ορισμός. (Συγκλιση Σειράς)

Εστω (a_k) ακολούθια πραγματικών αριθμών.

Ορίζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Αν υπάρχει $s \varepsilon R$ ώστε $s_n \to s$ τότε λέμε ότι ο s είναι το αθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ή αλλιώς λέμε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στον s) και γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Ορισμός:

$$\underbrace{0.999...9}_{n} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ... + \frac{9}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$$

Ορισμός:

$$0.999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ... + \frac{9}{10^n} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$$ αν αυτό υπάρχει.

Απόδειξη:

$$\underbrace{0.999...9}_{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{10})^{k-1} = \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$$

και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

δηλαδή $s_n \longrightarrow 1$. Αφού i $s_n \longrightarrow 1$, με βάση τον ορισμό η i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$ συγκλίνει στον 1

και $0.999... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1$.

Μια αυστηρή απόδειξη!

2) Η γραφή 1=0,999…. αφορά διπλή αναπαράσταση ενός και του ιδίου αριθμού στο ίδιο σύστημα αρίθμησης πράγμα που θεωρείται ότι «δεν είναι δυνατόν να ισχύει». Βεβαίως μια ελάχιστη κλάση των ρητών μπορεί να αναπαρασταθεί με πεπερασμένη μορφή (μόνο οι λεγόμενοι και ως «δεκαδικοί», που δεκαδικοί, είναι της μορφής $A/(2^{\nu}5^{\mu})$ αναγώγου κλάσματος με ν,μ $\in \mathbb{N}$) ενώ «σχεδόν όλοι» οι ρητοί παριστάνονται με άπειρη περιοδική μορφή. Αλλά και οι περατούμενοι δεν ξεφεύγουν από την απειρομορφή, αφού λ.χ. 1,2=1,1999… Φυσικά για τους αρρήτους, ούτε λόγος!

3) Και στις παραπάνω αποδείξεις που παραθέτουμε, υπάρχουν σοβαρές επιστημονικές αντιρρήσεις καθώς πράξεις με απειροπαραστάσεις γενικώς στα Μαθηματικά, δεν επιτρέπονται. Ο λόγος είναι, ότι για να χειριστείς αλγεβρικά μια απειρο-παράσταση (εδώ σειρές) αυτή θα πρέπει να εκφράζει κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, όπως λέμε να συγκλίνει. Ιστορικά είναι γνωστή η «Σειρά του Grandi» $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}$, [4] , όπου μόνο με χρίση επιμεριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης δίνει διαδοχικώς ως «αποτέλεσμα» 0, 1 ή και ½ Φυσικά, δεν έχει νόημα αριθμού ως αποκλίνουσα σειρά. Οπωσδήποτε όμως, κάποιοι που έχουν ακούσει κάποια ανώτερα Μαθηματικά, γνωρίζουν ότι η απειροπαράσταση 0,999… θέλει προσεκτικότερο χειρισμό, καθώς εκ πρώτης όψεως δεν μοιάζει για αριθμός, υπάρχουν ενστάσεις κατά πόσον μπορούμε να κάνουμε απειροπροσθέσεις, απειροδιαιρέσεις , όταν όλα, τα έχουμε συνηθίσει να τα εκτελούμε στο πλαίσιο του πεπερασμένου.

Συμπεράσματα: Το όλον θέμα, αναδεικνύει ότι οι άνθρωποι έχουν μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στην διαίσθησή τους, παρά στην μαθηματική απόδειξη. Αυτό ισχύει και για μυημένους λιγότερο ή περισσότερο στα Μαθηματικά. Φαίνεται ακόμη ότι τα νοητικά μοντέλα που έχουν οι άνθρωποι για τις μαθηματικές έννοιες και αντικείμενα είναι ενίοτε δομικά ατελή και υπάρχει ανάγκη βελτίωσής τους από την διδακτική των Μαθηματικών, εφ΄όσον είναι τελικά εφικτό αυτό, δεδομένου ότι κάποια που εδράζονται στην κατανόηση άπειρων και απειροστών είναι εξαιρετικά δυσνόητα όχι στο μαθηματικό τους μέρος, αλλά στο διαισθητικό. Σε κάθε όμως περίπτωση, οι εκτεταμένες έντονες συζητήσεις για Μαθηματικά θέματα είναι κάτι που είναι μόνο χρήσιμο για τα ίδια τα Μαθηματικά και για τους χρήστες τους, ενώ τελικά το σωστό νικά το λάθος, όσο κι αν το τελευταίο επιμένει!

Summary : The 0,999...=1 equivalence is an issue of student internet discussions and far beyond. The mentioned parity (equivalence) is stubbornly doubted. Even specific mathematical proofs are not persuasive. It seems that the difficulty in the intuitive comprehension of the infinite, indicates the limits of the finite nature of human beings while at the same time the power as well as the practical value of mathematical proofs are highlighted

Βιβλιογραφία:

[1] Wikipedia . Λήμμα : «0.999…» Διάθεση: https://el.wikipedia.org/wiki/0,999...

[2] Bogomonly Alexander :Άρθρο : «.999…=1?» διατίθεται: http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/999999.shtml

[3] Kalid Azad . Άρθρο με συζήτηση: «A Friendly Chat About Whether 0.999.. = 1»Διάθεση: http://betterexplained.com/articles/a-friendly-chat-about-whether-0-999-1

[4] Wikipedia. Λήμμα: «Grandi's series» Διατίθεται : https://en.wikipedia.org/wiki/Grandi's_series